

מתמטיקה

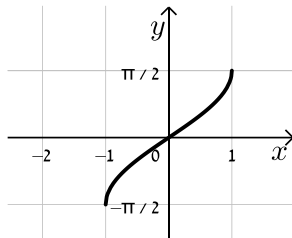
פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות..... 1
2. הנגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות..... 4

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

סיכום כללי:

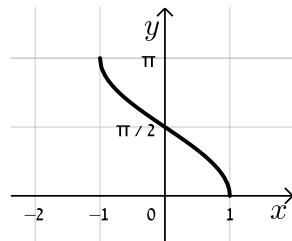


תיאור גרפי של הפונקציה : $f(x) = \arcsin(x)$

סימון נוסף : $f(x) = \sin^{-1}(x)$

תחום הגדרה : $-1 \leq x \leq 1$

טווח : $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

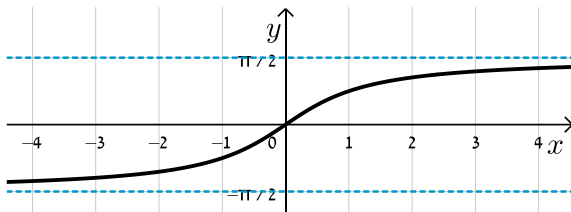


תיאור גרפי של הפונקציה : $f(x) = \arccos(x)$

סימון נוסף : $f(x) = \cos^{-1}(x)$

תחום הגדרה : $-1 \leq x \leq 1$

טווח : $0 \leq f(x) \leq \pi$

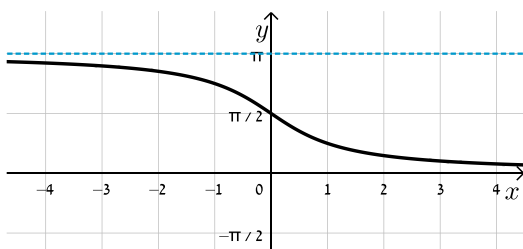


תיאור גרפי של הפונקציה : $f(x) = \arctan(x)$

סימון נוסף : $f(x) = \tan^{-1}(x)$

תחום הגדרה : $-\infty < x < \infty$

טווח : $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$



תיאור גרפי של הפונקציה : $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

סימון נוסף : $f(x) = \cot^{-1}(x)$

תחום הגדרה : $-\infty < x < \infty$

טווח : $0 < f(x) < \pi$

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	זהות
סינוס	$\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$
קוטנגנס	$\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון:

- א. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ב. $\arccos(-1)$
- ג. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ד. $\arctan(-\sqrt{3})$
- ה. $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ו. $\arcsin(-0.5)$

(2) חשב ללא מחשבון:

- א. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ב. $\sin(\arcsin(-0.5))$
- ג. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ד. $\cos(\operatorname{arccot}(1))$
- ה. $\sin(2\arctan(\sqrt{3}))$ ו. $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$

(3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x} & \text{ב. } y = \arccos \frac{x+3}{2x+1} \\ \text{ג. } y = \arctan \frac{1}{1-\ln x} \end{array}$$

(4) הוכח כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} & \text{ב. } \sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ \text{ג. } \arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{ד. } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}, x \neq 0 \end{array}$$

(5) הראה את הקשר הבא : $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-\frac{\pi}{4}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{3}$ ד. $-\frac{\pi}{3}$ ה. ϕ ו. $-\frac{\pi}{6}$
- (2) א. $-\frac{\pi}{6}$ ב. $-\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 1 ה. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (3) א. $x \leq \frac{2}{5}, x \geq 4$ ב. $x \leq -\frac{4}{3}, x \geq 2$ ג. $x > 0, x \neq e$
- (4) שאלות הוכחה.
- (5) הוכחה.

הנגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

סיכום כללי:

נוסחאות הגזירה של הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

$$f(x) = \arcsin(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

(2) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = (\sin^{-1}(x))^2$

(3) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(4) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = (\cos^{-1}(x^2))^2$

(5) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x}{\arccos(x)}$

(6) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(7) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$$(8) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \sqrt{\operatorname{arccot}(x)}$$

$$(9) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \cos(\arcsin(x^2))$$

$$(10) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \arctan\left(\sqrt{\sin(\sqrt{x})}\right)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x-9}}$$

$$(2) \quad f'(x) = \frac{2\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) \quad f'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{-4x \arccos(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(5) \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^{-1}(x)} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (\cos^{-1}(x))}$$

$$(6) \quad f'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

$$(7) \quad f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(8) \quad f'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}}$$

$$(9) \quad f'(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(10) \quad f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sin\sqrt{x})\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$